ANEXO 1-A
HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS DE BASE

1-A.1 EL OPERADOR SUMA*

1-A.1.1 Definición

El operador suma es sencillamente una manera compacta de escribir una suma cuando los términos sucesivos pueden escribirse bajo la forma de una expresión general que varía en función de un índice. Por ejemplo, la suma

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

puede escribirse

$$\sum_{i=1}^{5} x_i$$

En esta expresión, i es una variable que toma sucesivamente los valores 1, 2, 3, 4 y 5 : el "i=1" que se encuentra bajo el Σ indica que el valor inicial de la variable i es 1 ; el "5" que se encuentra encima del Σ indica que el valor terminal de la variable i es 5. La variable x_i es una función de la variable i, es decir que su valor depende del valor de i: cuando $i = 1$, $x_i = x_1$; cuando $i = 2$, $x_i = x_2$; y así sucesivamente. Finalmen-

* Lo que sigue fue sacado en gran parte del anexo I de Hohn (1964).

te, el signo Σ indica que hay que *sumar* x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5, los valores sucesivos de x_i. Se lee esta expresión de la manera siguiente : "la suma de los x_i para i variando de 1 a 5".

De manera más general, tendremos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Además, cuando no hay ambigüedad posible sobre los valores inicial y terminal del índice, puede escribirse de manera elíptica

$$\sum_{i} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Hay que observar que el índice i es un índice mudo (*dummy index*). La elección de la letra que sirve para representar el índice mudo es perfectamente arbitraria :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Hay también un cierto grado de arbitrariedad en la elección de los valores inicial y terminal, como lo muestra el ejemplo siguiente :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} x_{i-1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

En los desarrollos matemáticos, es a veces cómodo poder decalar así el índice mudo.

* * *

Para calcular el valor numérico de la expresión

$$\sum_{j} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

hay que conocer los valores de $x_1, x_2, ..., x_n$. En ciertos casos, la notación permite conocer directamente el valor de cada uno de los términos de la suma. He aquí algunos ejemplos :

$$\sum_{t=1}^{n} t^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \text{ (basta conocer } n\text{)}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \left(\frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{K}\right)$$

(basta conocer K)

Se encuentran también expresiones como

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

donde el índice mudo tiene a la vez un papel de índice propiamente dicho (en a_j) y un papel numérico (como exponente en x^j).

Se utiliza también el operador suma para tratar sumas infinitas como

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

Se emplea entonces el símbolo ∞ para designar el valor terminal del índice.

1-A.1.2 Reglas de base (sumas finitas)

Las reglas de base para la utilización del operador suma son las siguientes :

1. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

2. $\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$

3. $\sum_{i=1}^{n} (c\,x_i) = c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

4. $\sum_{i=1}^{t} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{t} x_i + \sum_{i=1}^{t} y_i$

Todas estas reglas, excepto la primera, pueden deducirse de la definición

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

La primera regla es más bien una convención, que se justifica de la manera siguiente. Supongamos que la variable x_j sea una constante :

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = c$$

Entonces el valor de la suma se da por

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c + c + \cdots + c = n\,c$$

La expresión "$\sum_{i=1}^{n} c$" se interpreta por lo tanto como "$\sum_{i=1}^{n} x_i$ donde $x_i = c$ para todo i". De ahí viene la primera regla. Así :

$$\sum_{i=1}^{5} 7 = 5 \times 7 = 35$$

1-A.1.3 Sumas dobles

Supongamos que haya que tratar un conjunto de $n \times m$ cantidades t_{ij}, con $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., m$. Estas cantidades pueden disponerse en forma de cuadro :

$$\begin{matrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nm} \end{matrix}$$

Para hacer la suma de todos los t_{ij}, puede primero hacerse el total de los términos de cada línea y luego sumar los totales de las líneas, lo que da

$$\sum_{j=1}^{m} t_{1j} + \sum_{j=1}^{m} t_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} t_{nj}$$

La misma expresión puede escribirse de manera más compacta mediante un segundo operador suma :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} t_{ij} \right)$$

Se hubiera obtenido el mismo resultado si se hubiera hecho primero el total de los términos de cada columna y luego se hubieran sumado los totales de las columnas :

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \right)$$

Pues que ambos resultados son iguales, se tiene entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} t_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \right)$$

Por esta razón, se ometen generalmente las paréntesis. Se tiene entonces la regla

5. $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} t_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} t_{ij}$$

(No se aplica siempre a las sumas infinitas)

La misma regla puede generalizarse en sumas triples, cuádruples, etc.

* * *

Hay que observar que en una doble suma, el índice de la suma exterior puede aparecer como valor inicial o terminal de la suma interior. Pero en tal caso, no se puede invertir las sumas como parece permitir la regla 5. Veamos por qué. Por ejemplo, supongamos que se desee hacer la suma de los valores del cuadro triangular siguiente :

$$\begin{array}{lllll} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

La suma de los totales de las líneas puede escribirse :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$$

y, de manera más elíptica,

$$\sum_{i}\sum_{j\leq i} a_{ij}$$

Asimismo, la suma de los totales de las columnas puede escribirse

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$$

y, de manera más elíptica,

$$\sum_{j}\sum_{i\geq j} a_{ij}$$

No obstante, *no* se puede escribir $\sum_{i\geq j}\sum_{j} a_{ij}$: eso no tendría ningun sentido. Pues la expresión $\sum_{j}\sum_{i\geq j} a_{ij}$ significa $\sum_{j}\left(\sum_{i\geq j} a_{ij}\right)$: la segunda suma se hace adentro de la primera (se cálcula antes). Por tanto, el valor inicial de la primera suma (exterior) no puede depender del índice de la segunda suma (interior).

Supongamos que se desee excluir de la suma los términos de la diagonal del cuadro (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}). Se escribe :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i}\sum_{j\leq i} a_{ij} - \sum_{i} a_{ii} = \sum_{i}\sum_{j<i} a_{ij}$$

(se nota la diferencia entre < y ≤)

o

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{j}\sum_{i\geq j} a_{ij} - \sum_{i} a_{ii} = \sum_{i}\sum_{j>i} a_{ij}$$

(se nota la diferencia entre > y ≥)

1-A.1.4 Nota : el operador producto

El operador producto es análogo al operador suma. Sirve para escribir productos de manera compacta :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$$

El uso del operador producto sigue las siguientes reglas :

1. $\prod_{j=1}^{n} c = c^n$
2. $\left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)\left(\prod_{j=k+1}^{n} x_j\right) = \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)$
3. $\prod_{j=1}^{n} k\, x_j = k^n \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)$
4. $\prod_{j=1}^{n} x_j y_j = \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\prod_{j=1}^{n} y_j\right)$
5. $\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} x_{ij} = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} x_{ij}$

1-A.1.5 Ejercicios sobre el operador suma

1. En los ejercicios 1.1 hasta 1.3, hay que calcular los valores de los x_i por medio de la ecuación:

   $x_i = 5 + 3\,i$

¿Cuál es el valor numérico de las expresiones siguientes?

1.1 $\sum_{k=1}^{4} x_k$

1.2 $\sum_{i=0}^{3} x_i$

1.3 $\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}$, cuando $n = 4$

2. Calculen

2.1 $\sum_{x=2}^{3} x^3$

2.2 $\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{1}{i}\right)$

2.3 $\sum_{j=1}^{10} a$,

cuando $a = 345$

3. Hagan la demostración de las siguientes reglas explicitando las expresiones a partir de la definición del operador suma:

3.1 $\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$

3.2 $\sum_{i=1}^{n} (c\, x_i) = c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

3.3 $\sum_{i=1}^{t} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{t} x_i + \sum_{i=1}^{t} y_i$

4. En los ejercicios 4.1 hasta 4.8, se trata de datos en forma de un cuadro:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 50 \\ 5 & 30 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Cuál es el valor de las expresiones siguientes?

4.1 $\sum_{i} \sum_{j} a_{ij}$

4.2 $\sum_{i} a_{2i}$

4.3 $\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} a_{ij}$

4.4 $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}$

4.5 $\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{j} a_{ij}$

4.6 $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{i} a_{ij}$

4.7 $\sum_{i} \sum_{j>i} a_{ij}$

4.8 $\sum_{i} \sum_{j \leq i} a_{ij}$

Las soluciones se encuentran al fin del apéndice.

1-A.2 Los logaritmos y la función exponencial

1-A.2.1 Los exponentes

Para cualquier número real positivo b y cualquier entero positivo n, la expresión

$$b^n$$
significa, por su definición,
$$b \times b \times \ldots \times b$$
donde el número real positivo b aparece n veces. De esta definición, siguen

1. $b^m \times b^n = b^{m+n}$
2. $b^m \div b^n = b^{m-n}$ cuando $m > n$
3. $(b^n)^m = b^{m \times n}$

Según la definición dada inicialmente, la expresión b^n tiene un significado únicamente cuando n es un entero positivo. Sin embargo, las tres reglas anteriores conducen a las generalizaciones siguientes.

Cuando m=n,
$$b^0 = b^{m-n} = b^m \div b^n = 1$$
Tenemos también
$$b^{-n} = b^{0-n} = b^0 \div b^n = 1 \div b^n = \frac{1}{b^n}$$
Finalmente, sabemos que, si a es la n^{esima} raíz de b,
$$a^n = b$$
Por lo tanto
$$b^{\left(1/n\right)} = \left(a^n\right)^{\left(1/n\right)} = \left(a^{n \times \left(1/n\right)}\right) = a^{\left(n/n\right)} = a = \sqrt[n]{b}$$
Más generalmente
$$b^{\left(m/n\right)} = \sqrt[n]{b^m}$$
Con estas generalizaciones, la expresión b^r tiene significado para cualquier número real positivo b y para cualquier número racional r=m/n. En cuanto a números irracionales, ellos pueden identificarse como el límite de una sucesión convergente de números racionales ; eso permite de dar un significado a la expresión b^r, no solamente cuando r es un

número racional, sino también cuando r es cualquier número real, racional o irracional.

1-A.2.2 Los logaritmos

Los logarítmos, tal como el operador suma, son nada más un convenio de escritura. La expresión

$$x = \log_b y$$

simplemente significa

$$y = b^x$$

y se lee como "x es el logaritmo de y en la base b". Por ejemplo,

$\log_{10} 1 = 0$

$\log_{10} 10 = 1$

$\log_{10} 100 = 2$

$\log_{10} 1000 = 3$

etc.

El logaritmo en la base 10 de un número que no es un poder entero de 10 no es un número entero. Por ejemplo,[79]

$\log_{10} 2 = 0.30103$ significa $10^{0.30103} = 2$

$\log_{10} 12 = 1.07918$ significa $10^{1.07918} = 12$

Las bases más frecuentemente usadas para logaritmos son 10 (logaritmos "comunes") y el número irracional $e = 2.71828\ldots$ Logaritmos en la base e se llaman "naturales", o "neperianos"[80]. Usualmente, $\log_e y$ se denota $\ln y$: naturalmente, "ln" significa "logaritmo natural".

---

[79] En las tablas de logarítmos que se usaban antes de los Lotus y otros Excel, el logaritmo estaba descompuesto en dos partes : la parte entera se llamaba la *característica*, y la parte fraccional, la *mantisa*. En log 12, la característica es de 1 y la mantisa de 07918.

[80] Del nombre de su inventor, el teólogo y matemático escocéz John Napier (1550-1617), cuyo nombre se escribe también "Neper".

La operación que consiste en encontrar un número a partir de su logaritmo se denota a veces por la palabra “antilog”; así tenemos la equivalencia

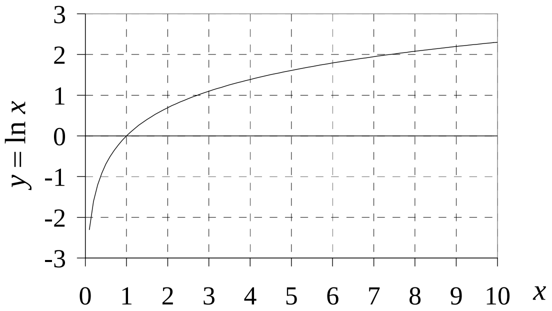
$$\operatorname{antilog}_b x = b^x$$

Entonces, antilog $x = e^x$ o 10^x, según se considera x como un logaritmo neperiano o un logaritmo comun.

La figura siguiente ilustra la relación entre un número y su logaritmo.

Función logarítmica

$y = \ln x$



Se ve que la transformación logarítmica es una transformación *monótona creciente*: si $y_1 > y_2$, entonces $\log y_1 > \log y_2$, pues $y = b^{\log y}$.

Las reglas que se aplican a los exponentes se transponen a los logaritmos.

1. La regla $b^m \times b^n = b^{m+n}$ implica

   $$\log (y \times z) = \log y + \log z$$

2. La regla $b^m \div b^n = b^{m-n}$ implica

   $$\log\left(\frac{y}{z}\right) = \log y - \log z$$

3. La regla $(b^n)^m = b^{m \times n}$ implica

$$\log y^r = r \times \log y$$

Desde la última regla puede inferirse la regla para pasar de una base a otra. Supongamos que queremos pasar desde el logaritmo común en la base 10 al logaritmo neperiano en la base e. Pues $x = \log_{10} y$ significa $10^x = y$, tenemos

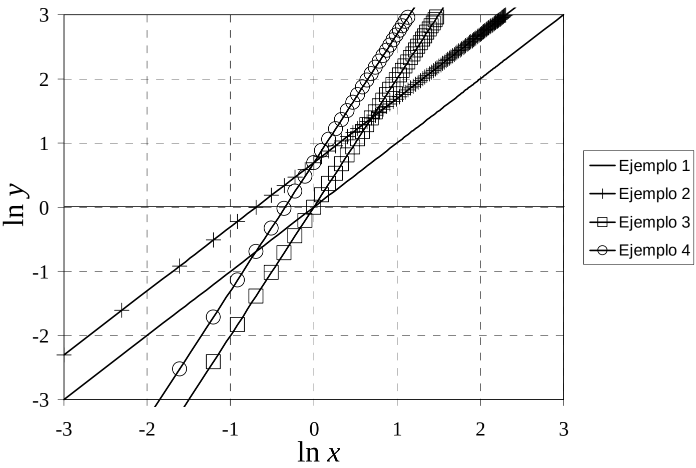
$$\log_e y = \log_e 10^x = x \log_e 10 = \log_{10} y \times \log_e 10$$

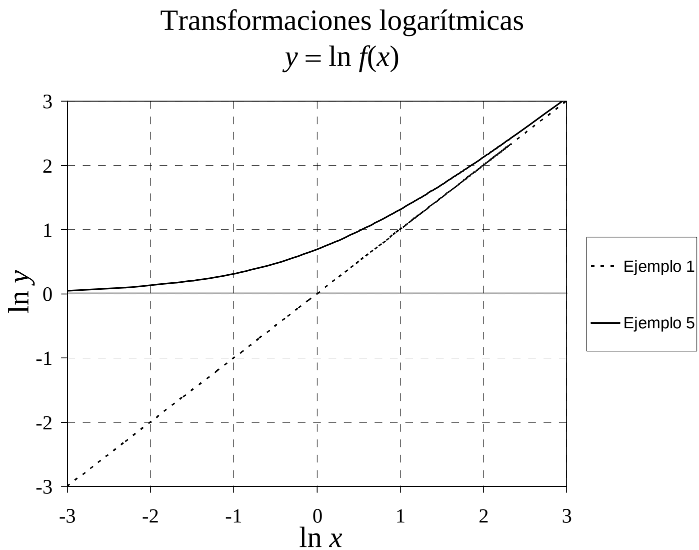
Las figuras que siguen muestran cómo cambia la forma de relaciones con la transformación logarítmica. Las relaciones que se representan son:

4. $y = x \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln x$
5. $y = 2\,x \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln 2 + \ln x$
6. $y = x^2 \quad \Rightarrow \quad \ln y = 2 \ln x$
7. $y = 2\,x^2 \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln 2 + 2 \ln x$
8. $y = x + 1 \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln (x + 1)$

Transformaciones logarítmicas

$y = \ln f(x)$





Se ve que después de una transformación logarítmica, hay relaciones no lineales que se vuelven lineales, y hay relaciones lineales que se vuelven no lineales.[81]

1-A.2.3 La función exponencial

La función

$$y = e^x$$

se llama la función exponencial. Se denota también como y = exp(x), o más raramente, y = antilog$_e$ x.

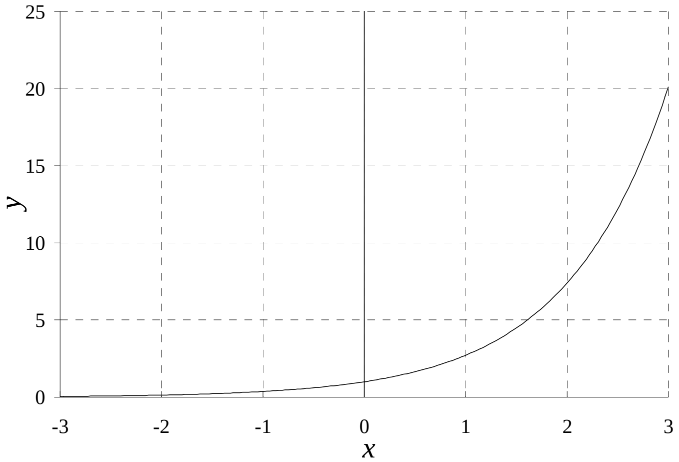
Se usa también la exponencial negativa, la cual tiene la forma

$$y = \exp(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

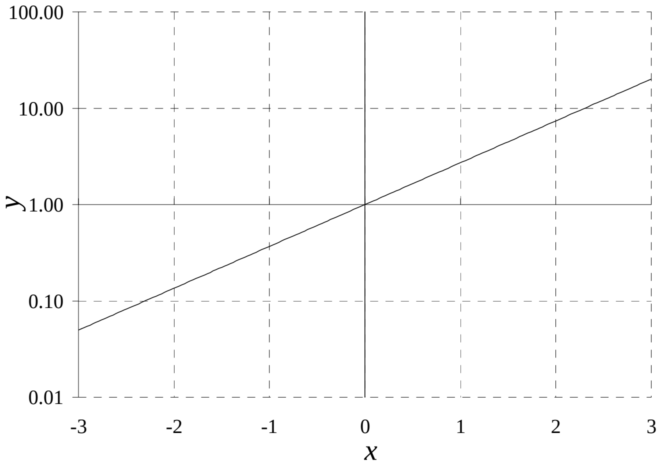
[81] Vea Wonnacott y Wonnacott (1992), p 513-523, “La non-linéarité résolue grâce aux logarithmes” (la no linealidad resuelta gracias a los logarítmos).

Las cuatro figuras siguientes ilustran la función exponencial.

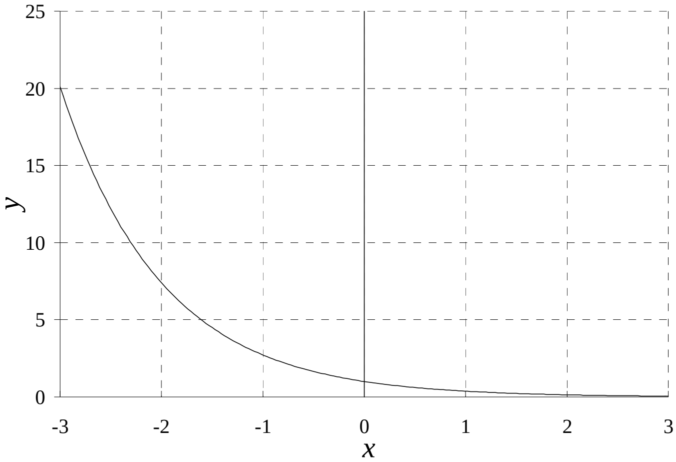
Función exponencial
$y = \exp(x)$



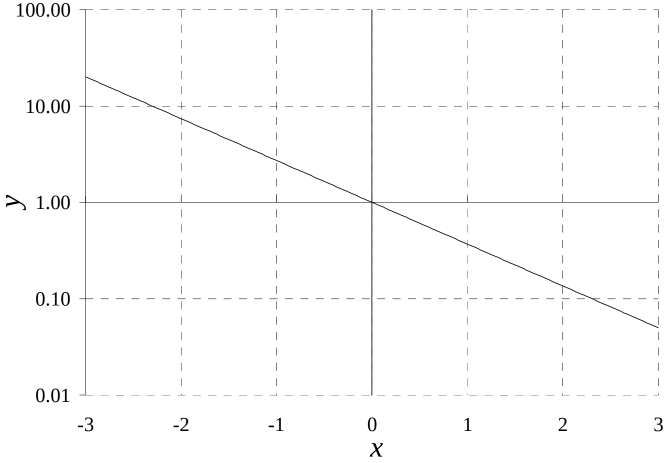
Función exponencial (escala logarítmica)
$y = \exp(x)$



Función exponencial negativa
$y = \exp(-x)$



Función exponencial negativa (escala logarítmica)
$y = \exp(-x)$



1-A.2.4 ¿Por qué los logarítmos neperianos?

El número irracional e se define como el límite de una sucesión infinita :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

El interés para esta constante neperiana viene del análisis del crecimiento exponencial. Comenzando con un valor inicial q_0, una cantidad q se multiplica cada período por un factor $(1+r)$; entonces, después de t períodos, esta cantidad será igual a

$$q = q_0\,(1+r)^t$$

Esta es la fórmula para el crecimiento geométrico de una cantidad a la que se aplica un interés compuesto una vez cada período. Supongamos que la frecuencia en que el interés se compone sea multiplicada por n. Tenemos

$$q' = q_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

¿Qué sucede cuando n llega a ser muy grande (cuando n tiende a la infinidad y que el interés se compone continuamente)? Para verlo, escribamos la ecuación anterior en la forma siguiente

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{\left(n/r\right)}\right]^{n/r}\right\} = e$$

Cuando n tiende a la infinidad, n/r también tiende a la infinidad y la expresión entre los paréntesis rizados tiende a la constante e. Se obtiene :

$$\lim_{n\to\infty} q' = q_0\, e^{rt}$$

Ésta es la fórmula del crecimiento exponencial, que es la versión continua del crecimiento geométrico. Se nota que ambas fórmulas se vuelven lineales cuando se toma el logaritmo.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SOBRE EL OPERADOR SUMA

1.1 $$\sum_{k=1}^{4} x_k = (5+3)+(5+6)+(5+9)+(5+12) = 50$$

1.2 $$\sum_{i=0}^{3} x_i = (5+0)+(5+3)+(5+6)+(5+9) = 38$$

1.3 Cuando $n = 4$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} = \sum_{i=0}^{3} x_{i+1} = \sum_{i=1}^{4} x_i = 50$

2.1 $$\sum_{x=2}^{3} x^3 = 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$$

2.2 $$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

2.3 Cuando $a = 345$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} a = 10\,a = 3450$

3.1 $$\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i = (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) + (x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n)$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

3.2 $$\sum_{i=1}^{n} (cx_i) = cx_1 + cx_2 + \cdots + cx_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} (cx_i) = c(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (cx_i) = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

3.3 $$\sum_{i=1}^{t} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_t + y_t)$$

$$\sum_{i=1}^{t} (x_i + y_i) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_t) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_t)$$

$$\sum_{i=1}^{t} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{t} x_i + \sum_{i=1}^{t} y_i$$

4.1 $$\sum_{i}\sum_{j} a_{ij} = 4 + 50 + 5 + 30 + 6 + 10 = 105$$

4.2 $$\sum_{i} a_{2i} = 5 + 30 = 35$$

4.3 $$\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} a_{ij} = (4 + 5) + (50 + 30) = 89$$

4.4 $$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} = (4 + 50) + (5 + 30) = 89$$

4.5 $\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} = (4) + (50 + 30) = 84$

4.6 $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = (4) + (5 + 30) = 39$

4.7 $\displaystyle\sum_{i}\sum_{j>i} a_{ij} = 50$

4.8 $\displaystyle\sum_{i}\sum_{j\leq i} a_{ij} = (4) + (5 + 30) + (6 + 10) = 55$