TEST D'HYPOTHÈSE

INGRÉDIENTS :

- **population**
- **hypothèse**
- **échantillon**
- **variable-test**
- **probabilité**
- **seuil de signification**

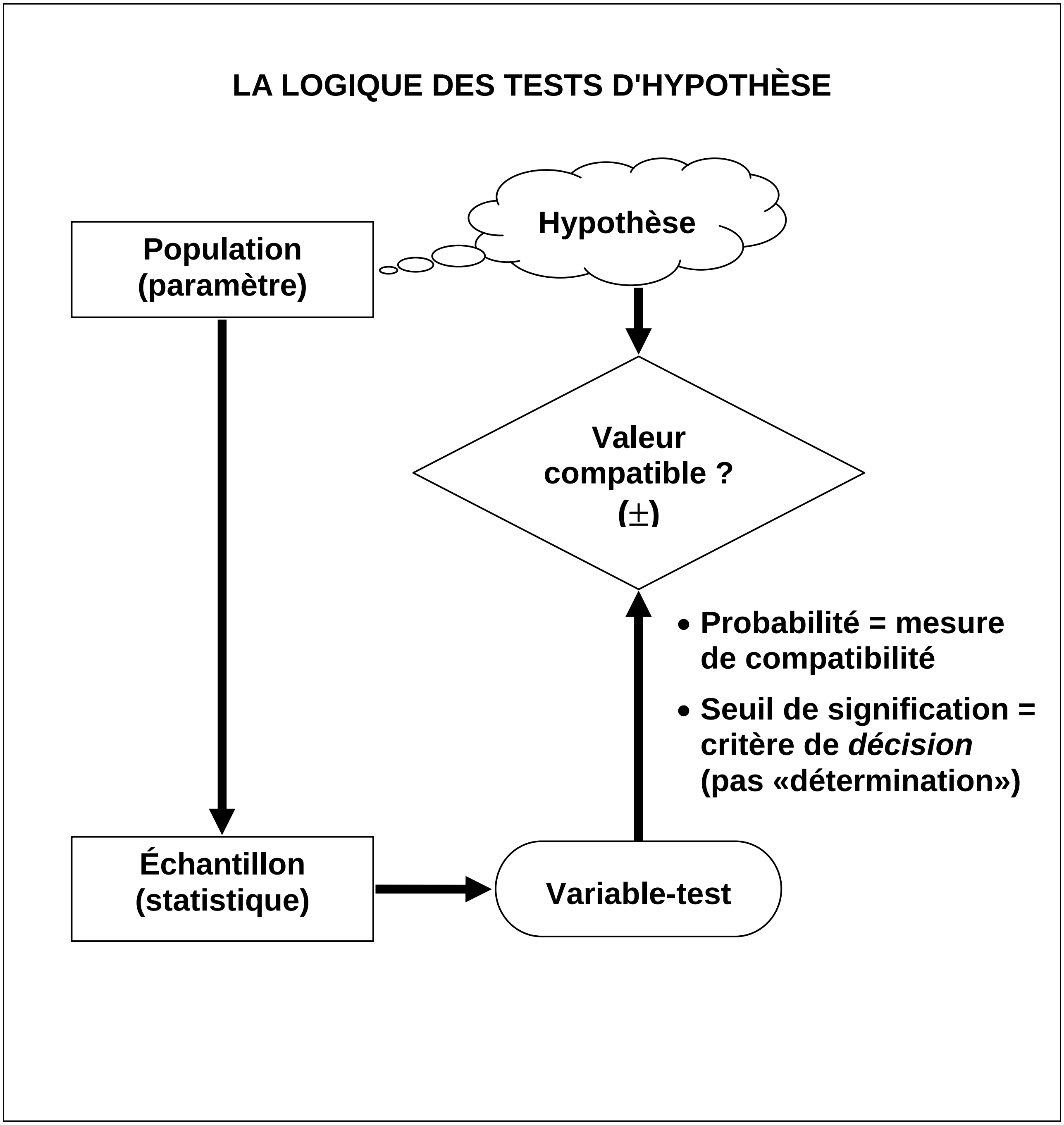
PROPRIÉTÉS INDISPENSABLES D'UNE VARIABLE-TEST :

1. **dépendre à la fois des données de l'échantillon et de l'hypothèse à tester**
2. **pouvoir être calculée**
3. **avoir une distribution d'échantillonnage connue**

ÉTAPES LOGIQUES D'UN TEST D'HYPOTHÈSE

1. **choisir une variable-test ;**
2. **vérifier que le modèle d'échantillonnage associé à cette variable-test est acceptable ;**
3. **calculer la valeur de la variable-test ;**
4. **choisir un seuil de signification ;**
5. **repérer les valeurs critiques de la variable-test (zone de rejet) ;**
6. **comparer la valeur de la variable-test avec les valeurs critiques et prendre la décision de rejeter ou non l'hypothèse.**

SCHÉMA 2A


LA LOGIQUE DES TESTS D'HYPOTHÈSE
Hypothèse
Population
(paramètre)
Valeur
compatible ?
(±)
• Probabilité = mesure de compatibilité
• Seuil de signification = critère de *décision* (pas «détermination»)
Échantillon
(statistique)
Variable-test

ARGUMENT ET ÉTAPES DU TEST D'HYPOTHÈSE CLASSIQUE

Modèle d'échantillonnage, hypothèse et implications (syllogisme)

2 : acceptable ?

Si {*modèle d'échantillonnage*},

alors {*variable*} a la distribution {*distribution d'échantillonnage*}.

Or,

1 : choisir

si {*hypothèse*},

alors {*variable*} est égale à la statistique {*variable-test*}.

Donc,

si {*modèle d'échantillonnage*} et si {*hypothèse*},

alors {*variable-test*} a la distribution {*distribution d'échantillonnage*}.

Règle de décision

On rejettera {*hypothèse*} si la valeur observée de {*variable-test*} appartient à un ensemble de valeurs extrêmes dont la probabilité est inférieure ou égale à {*seuil de signification*}.

4 : choisir

Étant donné

- la distribution {*distribution d'échantillonnage*}
- l'orientation du test (bilatéral, ou unilatéral, à gauche ou à droite),

l'ensemble de valeurs extrêmes ayant une probabilité égale à {*seuil de signification*} est défini par {*zone de rejet*}.

5 : repérer les valeurs critiques

Décision

3 : calculer

Or, la valeur observée de {*variable-test*} {*fait/ne fait pas*} partie de l'ensemble de valeurs extrêmes défini par {*zone de rejet*}.

Donc, la règle de décision choisie conduit à {*rejeter/ne pas rejeter*} {*hypothèse*}

6 : décider

SCHÉMA 2B

LA LOGIQUE DES TESTS D'HYPOTHÈSE

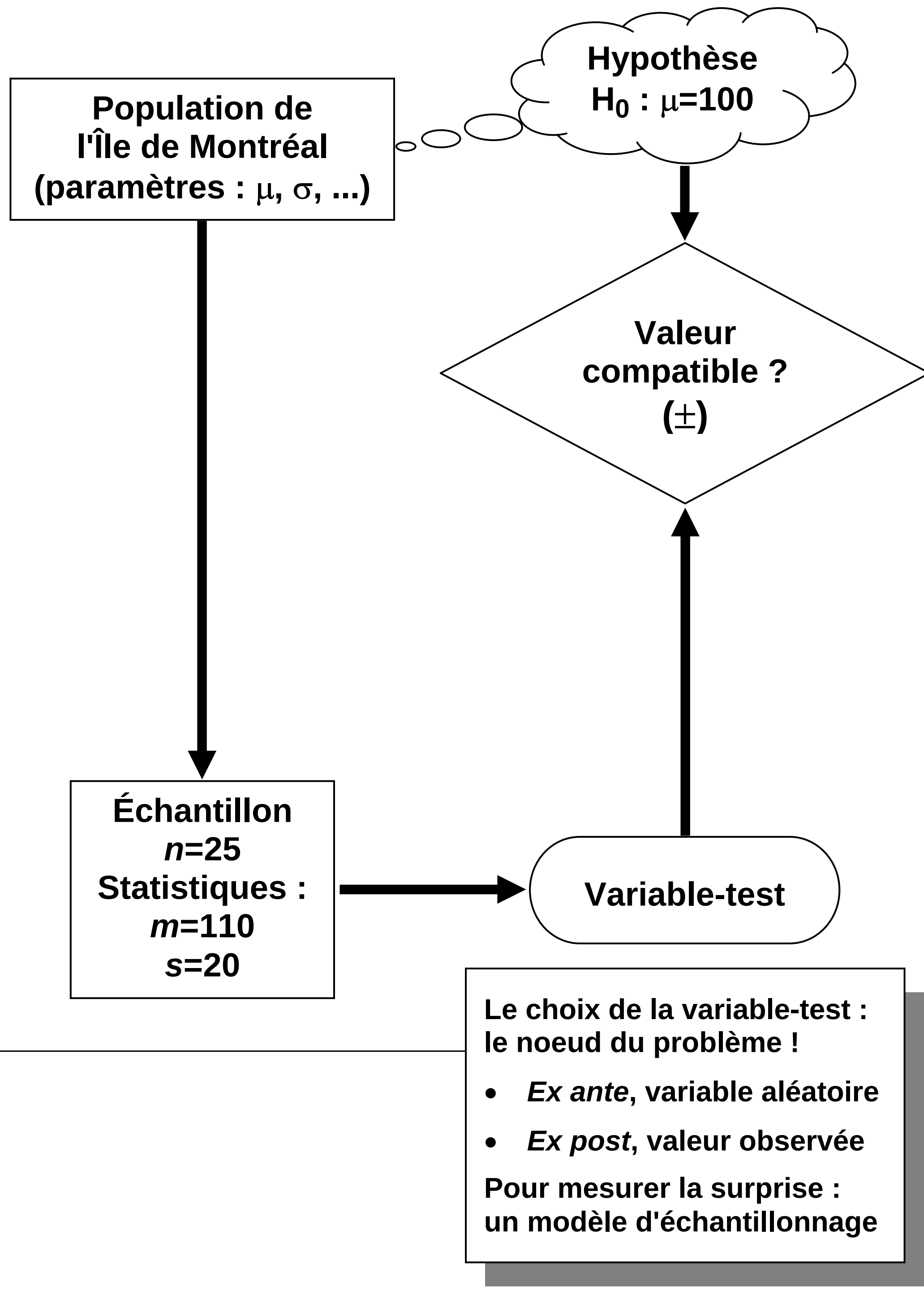
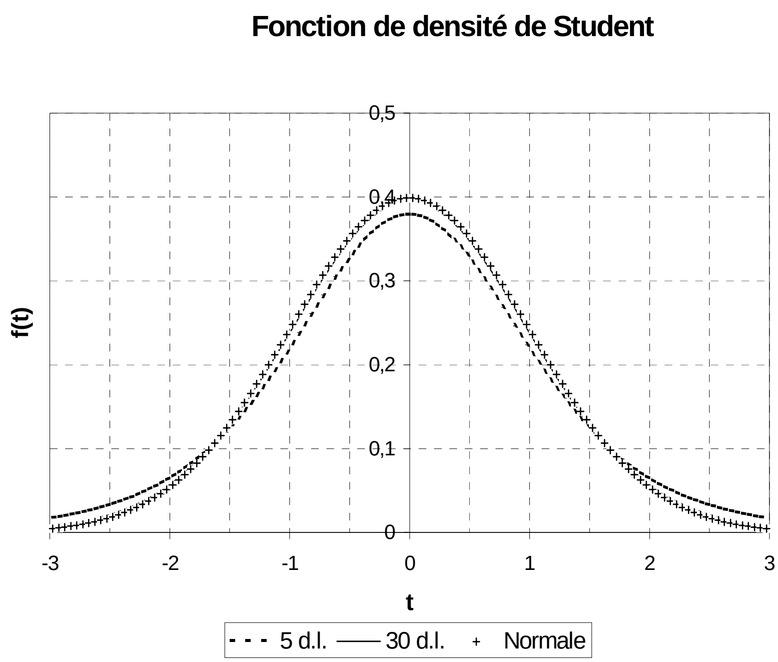


FIGURE 3 – DISTRIBUTION DE STUDENT



APPLICATION DE L'ARGUMENT AU TEST D'UNE HYPOTHÈSE SIMPLE SUR UNE MOYENNE

Formulation générale	***Exemple: n = 25; m_x = 110; s_x = 20; α = 0,05***
{hypothèse}	
$H_0 : \mu_x = \gamma$	$H_0 : \mu_x = 100$
{modèle d'échantillonnage}	
• Dans la population, la variable x a une distribution (approximativement) normale, avec une moyenne μ_x et un écart-type σ_x inconnus. • La population est de très grande taille et il en a été tiré un échantillon aléatoire simple de taille...	
n	25
{variable}	
$\dfrac{m_x - \mu_x}{\left(s_x / \sqrt{n} \right)}$	$\dfrac{110 - \mu_x}{\left(20 / \sqrt{25} \right)}$
{distribution d'échantillonnage} Distribution de Student avec...	
n–1 degrés de liberté	24 degrés de liberté
{variable-test}	
$t_{n-1} = \dfrac{m_x - \gamma}{\left(s_x / \sqrt{n} \right)}$	$t_{24} = \dfrac{110 - 100}{\left(20 / \sqrt{25} \right)} = 2{,}5$
{seuil de signification}	
α	0,05
Orientation du test et {zone de rejet}	
test bilatéral ($H_A : \mu_x \neq \gamma$) : $t_{n-1} < -\theta_{n-1}(\alpha)$ ou $t_{n-1} > +\theta_{n-1}(\alpha)$	test bilatéral ($H_A : \mu_x \neq 100$) : $t_{24} < -2{,}064$ ou $t_{24} > 2{,}064$
OU	
test unilatéral à droite ($H_A : \mu_x > \gamma$) : $t_{n-1} > +\theta_{n-1}(2\ \alpha)$	test unilatéral à droite ($H_A : \mu_x > 100$) : $t_{24} > 1{,}711$
OU	
test unilatéral à gauche ($H_A : \mu_x < \gamma$) : $t_{n-1} < -\theta_{n-1}(2\ \alpha)$	test unilatéral à gauche ($H_A : \mu_x < 100$) : $t_{24} < -1{,}711$

FIGURE 4 – TEST DE STUDENT BILATÉRAL

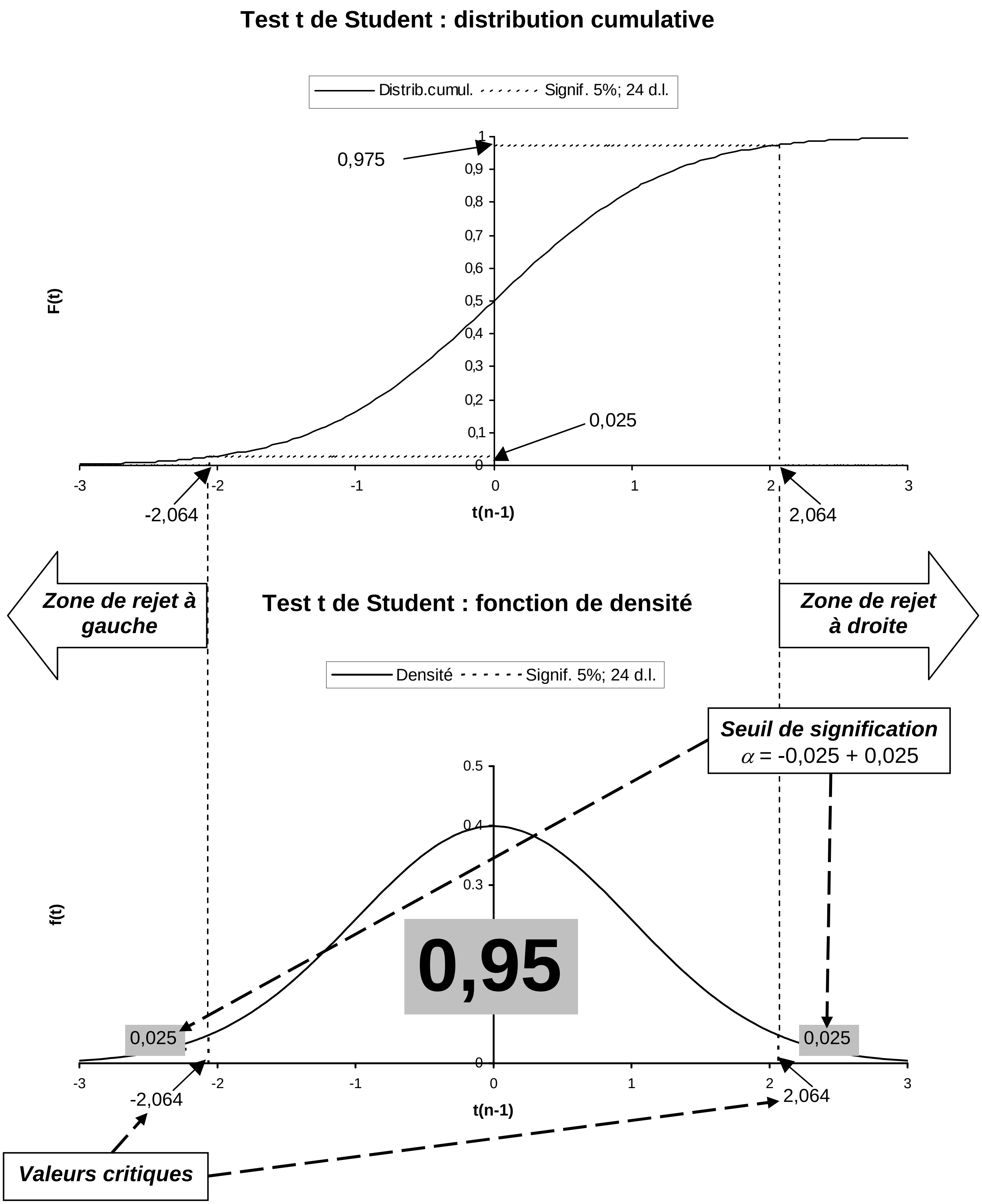
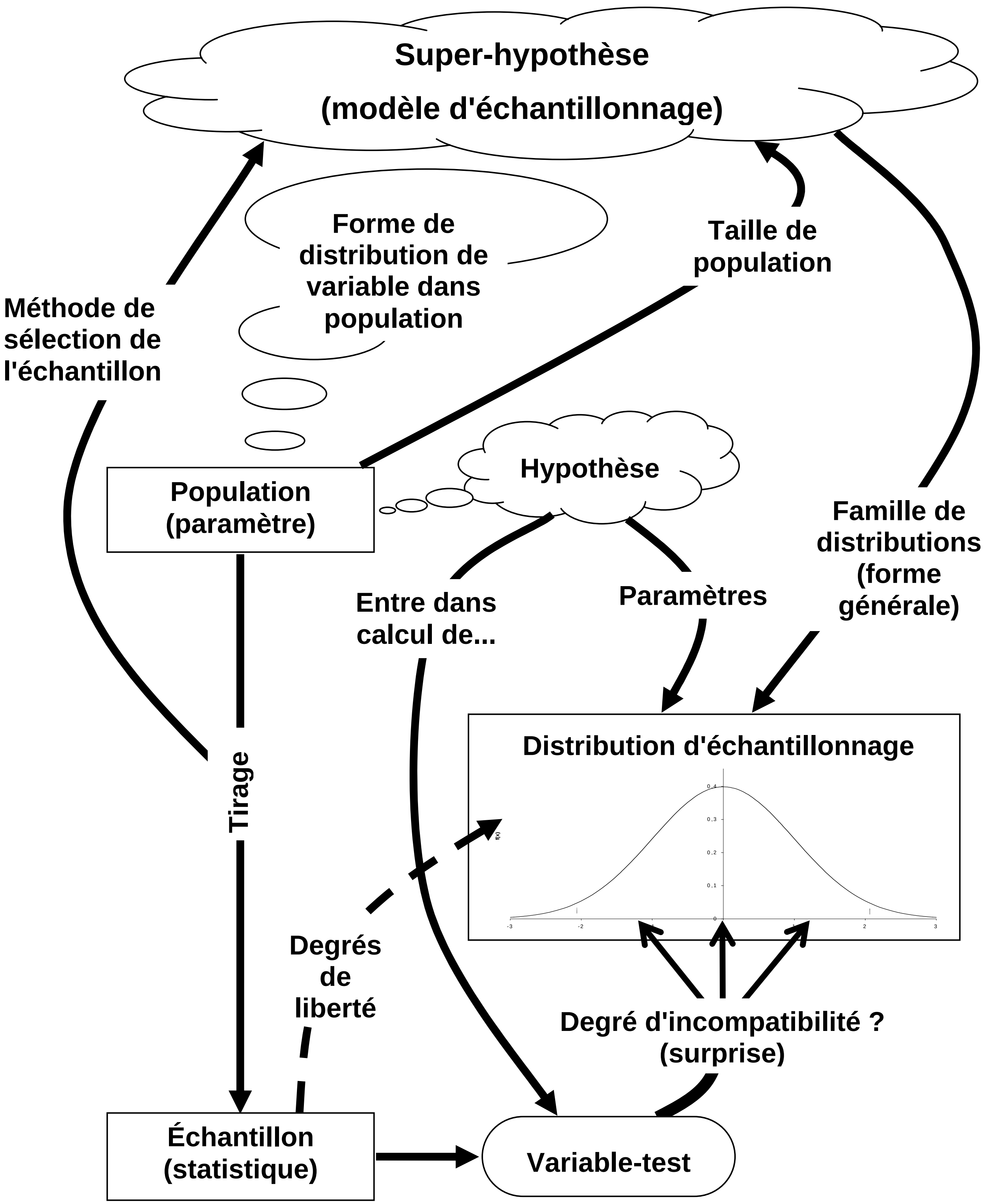


SCHÉMA 2C : LA LOGIQUE DES TESTS D'HYPOTHÈSE



TYPES D'ERREURS

Tableau des possibilités :

		Situation	
		H_0 est vraie	H_0 est fausse
Décision	Rejeter H_0	Erreur de type I	Bonne décision
	Ne pas rejeter H_0	Bonne décision	Erreur de type II

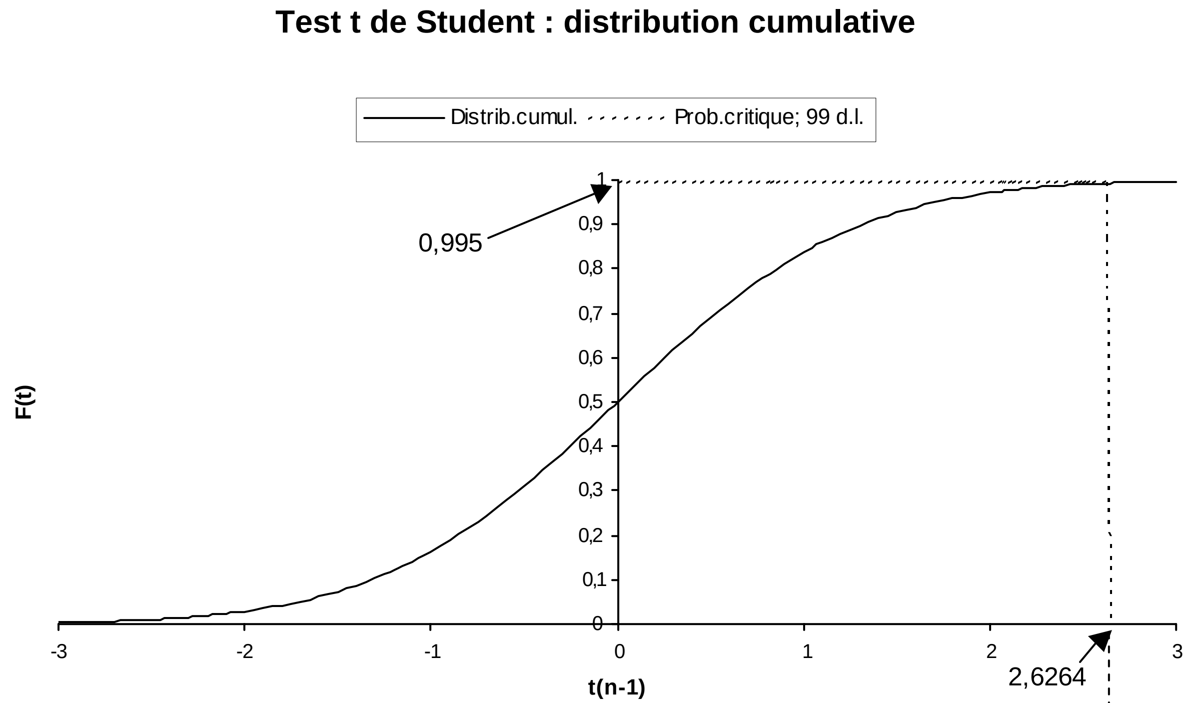
Probabilités des décisions étant donné la situation :

		Situation (inobservable)	
		H_0 est vraie	H_0 est fausse
Décision	Rejeter H_0	Seuil de signification α	Puissance $(1 - \beta)$
	Ne pas rejeter H_0	$(1 - \alpha)$	β

Niveau de signification : α

Puissance du test : $(1 - \beta)$

FIGURE 5A – TEST D'HYPOTHÈSE UNILATÉRAL



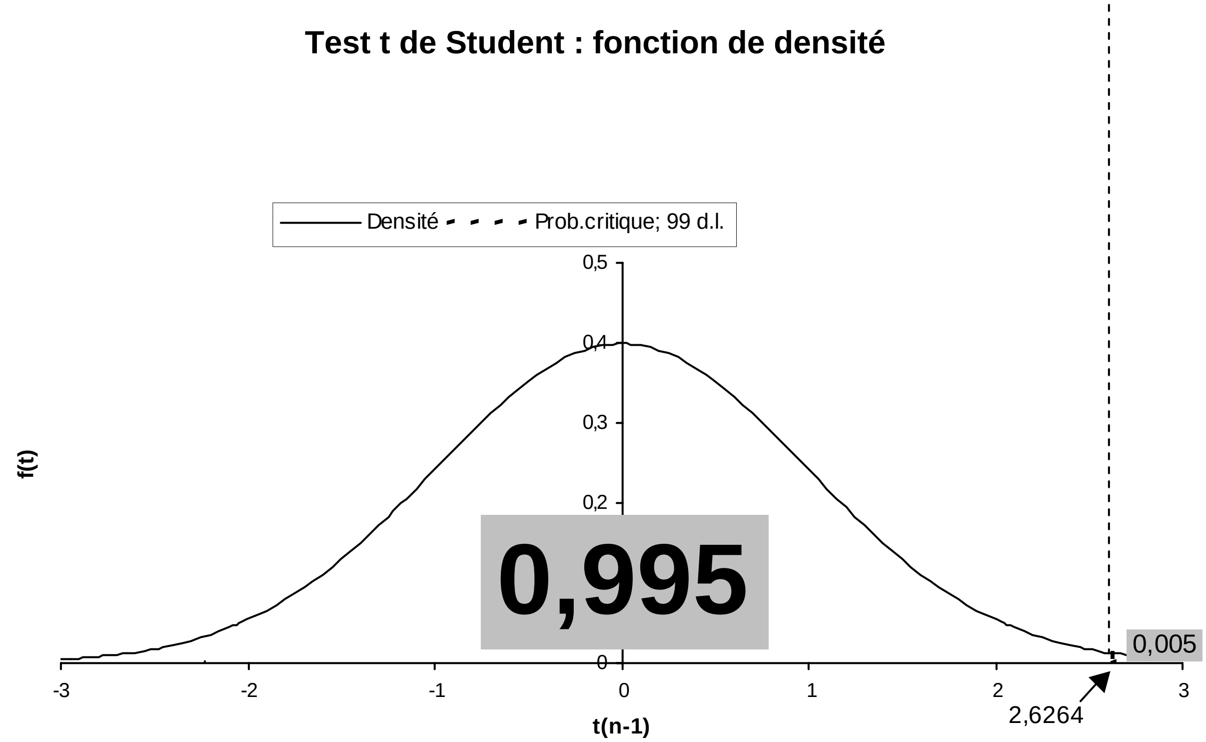


FIGURE 5B – TEST DE PROBABILITÉ CRITIQUE (BILATÉRAL)

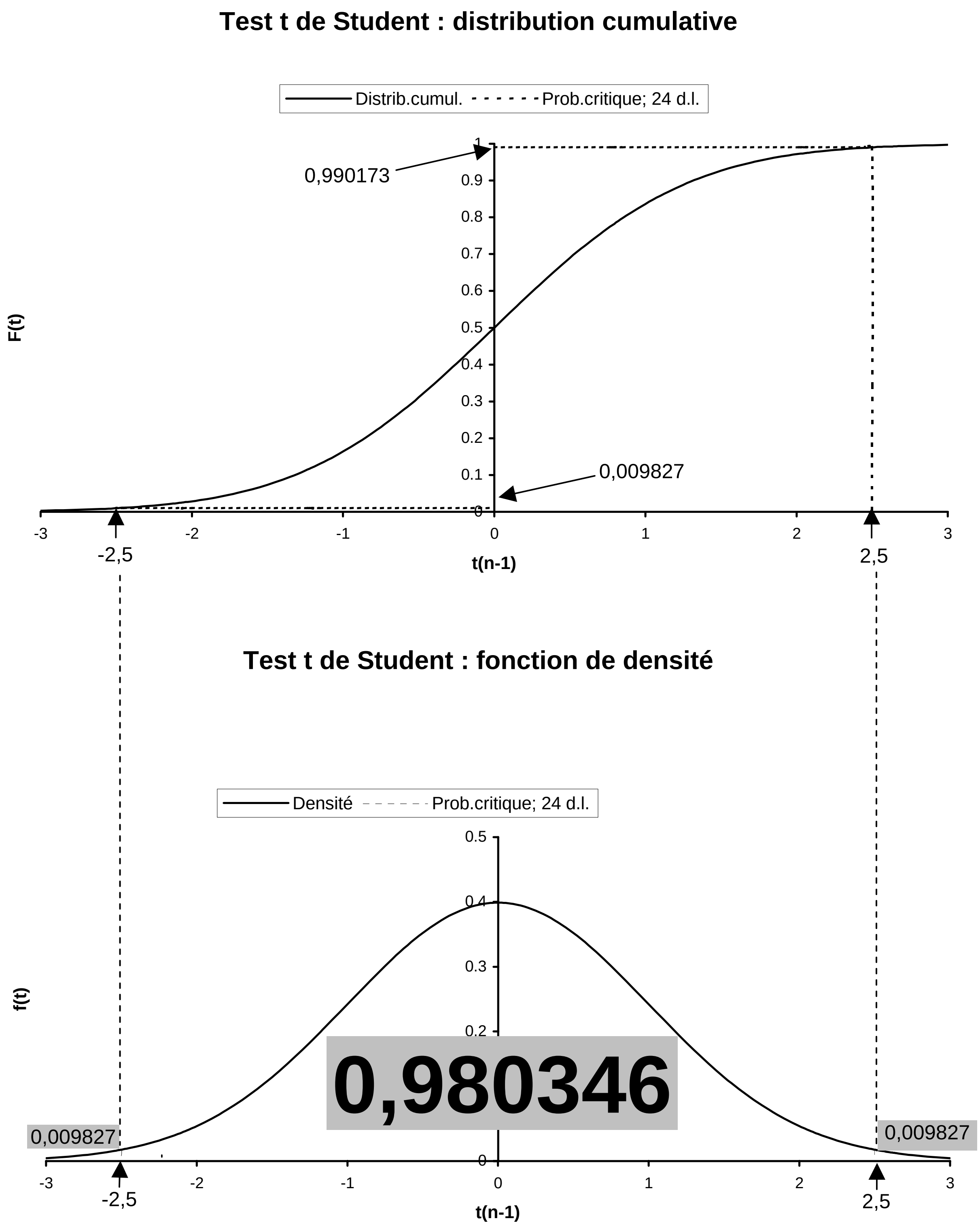
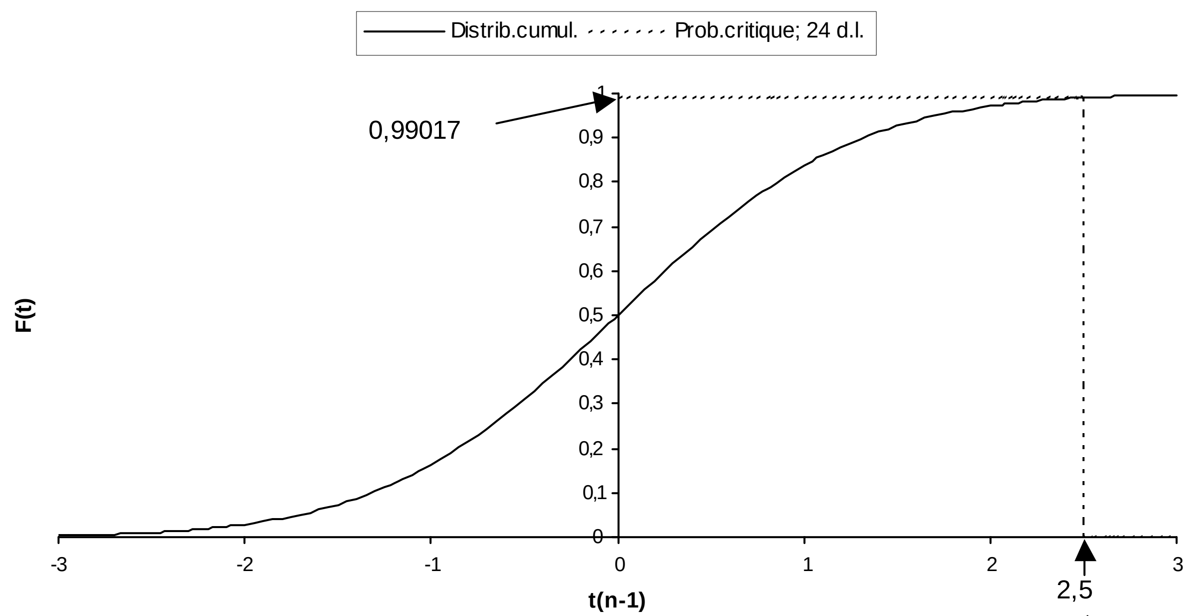
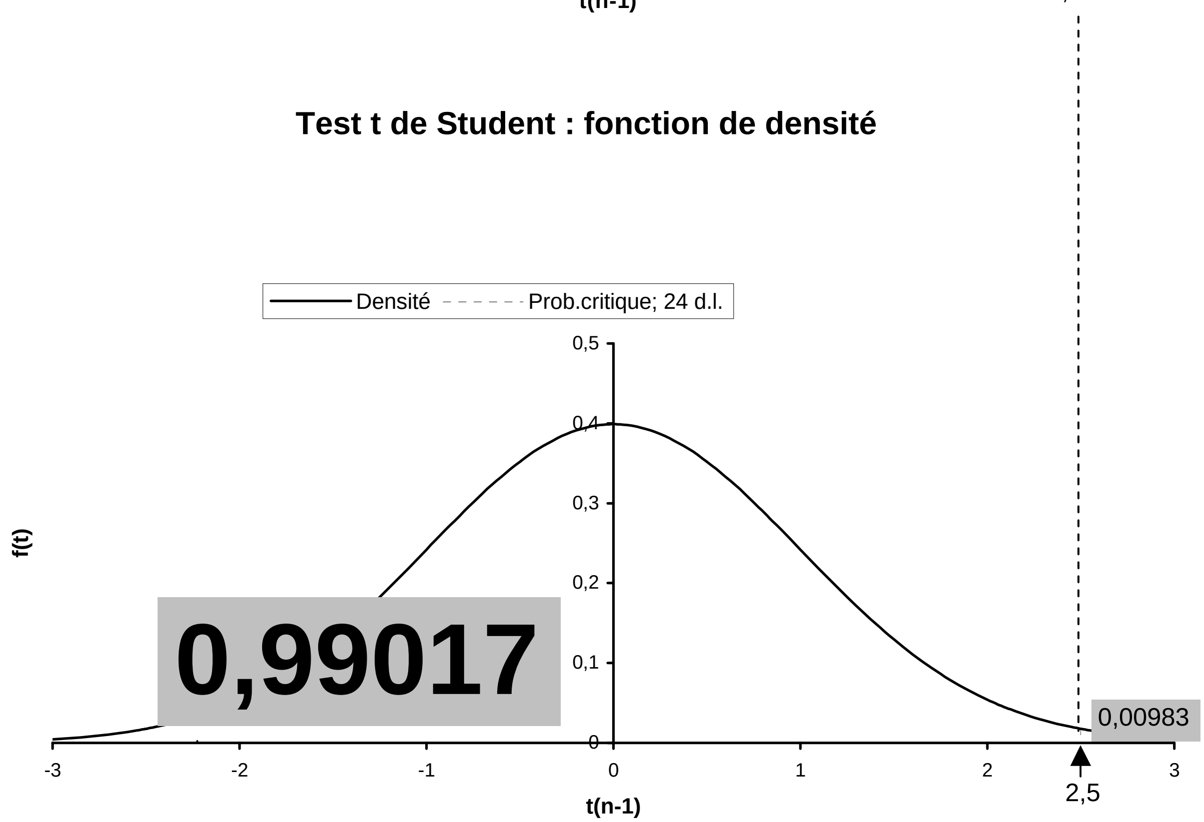


FIGURE 5C – TEST DE PROBABILITÉ CRITIQUE (UNILATÉRAL)

Test t de Student : distribution cumulative



Test t de Student : fonction de densité



ARGUMENT DU TEST DE PROBABILITÉ CRITIQUE
(TEST D'HYPOTHÈSE SANS SEUIL DE SIGNIFICATION PRÉ-DÉFINI)

Modèle d'échantillonnage, hypothèse et implications (syllogisme)

> **Si** {*modèle d'échantillonnage*},
>
> **alors** {*variable*} a la distribution {*distribution d'échantillonnage*}.

Or,

> **si** {*hypothèse*},
>
> **alors** {*variable*} est égale à la statistique {*variable-test*}.

Donc,

> **si** {*modèle d'échantillonnage*} et si {*hypothèse*},
>
> **alors** {*variable-test*} a la distribution {*distribution d'échantillonnage*}.

Évaluation de la crédibilité de l'hypothèse

Étant donné

- la distribution {*distribution d'échantillonnage*}
- l'orientation du test (bilatéral, ou unilatéral, à gauche ou à droite),

l'ensemble de valeurs extrêmes dont la limite est donnée par la valeur observée de {*variable-test*} a une probabilité égale à {*probabilité critique*}.

Donc, si {*hypothèse*},

alors, la valeur observée de {*variable-test*} appartient à un ensemble de valeurs extrêmes dont la probabilité est égale à {*probabilité critique*}.

Conclusion

On décide que {*probabilité critique*} {*est/n'est pas*} suffisamment petite pour conclure que les observations sont probablement incompatibles avec {*hypothèse*}, et alors on {*rejette/ne rejette pas*} {*hypothèse*}.

INTERVALLES DE CONFIANCE ET MARGES D'ERREUR SUR MOYENNE

Formulation générale	***Exemple: n = 25; m_x = 110; s_x = 20; α = 0,05***
$t_{n-1} = \dfrac{m_x - \gamma}{\left(s_x / \sqrt{n}\right)}$	$t_{24} = \dfrac{110 - \gamma}{\left(20 / \sqrt{25}\right)}$
Hypothèses rejetées à un seuil de signification de α (5 %)	
$t_{n-1} < -\theta_{n-1}(\alpha)$ ou $t_{n-1} > +\theta_{n-1}(\alpha)$	$t_{24} < -2{,}064$ ou $t_{24} > 2{,}064$
Hypothèses non rejetées à un seuil de signification de α (5 %)	
$-\theta_{n-1}(\alpha) < t_{n-1} < +\theta_{n-1}(\alpha)$	$-2{,}064 < t_{24} < +2{,}064$
$-\theta_{n-1}(\alpha) < \dfrac{m_x - \gamma}{\left(s_x / \sqrt{n}\right)} < +\theta_{n-1}(\alpha)$	
$-\theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right) < \left(m_x - \gamma\right) < +\theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right)$	
$-m_x - \theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right) < -\gamma < -m_x + \theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right)$	
$m_x + \theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right) > \gamma > m_x - \theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right)$	
$m_x - \theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right) < \gamma < m_x + \theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right)$	$110 - 2{,}064\left(20 / 5\right) < \gamma < 110 + 2{,}064\left(20 / 5\right)$
	$110 - 8{,}256 < \gamma < 110 + 8{,}256$
	$101{,}744 < \gamma < 118{,}256$
Avant que l'échantillon ne soit tiré, quelle que soit la valeur de μ_x, il y a une probabilité de (1–α) (95 %) que soit respectée la condition C : $m_x - \theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right) < \mu_x < m_x + \theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right)$	
L'intervalle de confiance...	
$\left[m_x - \theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right) ; m_x + \theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right)\right]$	$\left[110 - 2{,}064\left(20 / 5\right) ; 110 + 2{,}064\left(20 / 5\right)\right]$
	[101,744 ; 118,256]
... et son niveau de confiance	
$1 - \alpha = 1 -$ seuil de signification	$0{,}95 = 1 - 0{,}05$
Marge d'erreur avec un **niveau de confiance** de (1–α) (95 %)	
$\pm\, \theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x / \sqrt{n}\right)$	$\pm\, 8{,}256$

DÉTERMINATION DE LA TAILLE REQUISE D'UN ÉCHANTILLON (ESTIMATION DE LA MOYENNE)

Marge d'erreur :

$$\varepsilon = \pm\theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x \big/ \sqrt{n}\right)$$

Étapes :

1. Décider de la marge d'erreur acceptable ε.
2. Choisir le niveau de confiance désiré $(1 - \alpha)$.
3. Repérer dans la table les valeurs de $\theta_{n-1}(\alpha)$ pour les différentes tailles d'échantillon n.
4. Formuler à propos de s_x l'hypothèse du pire, c'est-à-dire la plus grande valeur de s_x que l'on puisse obtenir dans un échantillon.
5. Résoudre pour n l'équation suivante

$$\varepsilon = \pm\theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x \big/ \sqrt{n}\right)$$

$$\sqrt{n} = \theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x \big/ \varepsilon\right)$$

$$n = \left[\theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x \big/ \varepsilon\right)\right]^2$$

Exemple : $\varepsilon = 10$ et $\alpha = 0{,}10$

Hypothèse du pire : $s_x = 20$

$$n = \left[\theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x \big/ \varepsilon\right)\right]^2 = \left[\theta_{n-1}(0{,}10)\left(20 \big/ 10\right)\right]^2 = 4\left[\theta_{n-1}(0{,}10)\right]^2$$

Solution par approximations successives :

$\theta_{\infty}(0{,}10) = 1{,}645$ et $n_0 = \left[\theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x \big/ \varepsilon\right)\right]^2 = \left[\theta_{n-1}(0{,}10)\right]^2 = 4\left[1{,}645\right]^2 = 10{,}8$

$\theta_{11-1}(0{,}10) = 1{,}812$ et $n_1 = 4\left[\theta_{10}(0{,}10)\right]^2 = 4\left[1{,}812\right]^2 = 13{,}1 > 11$

$\theta_{13-1}(0{,}10) = 1{,}782$ et $n_2 = 4\left[\theta_{12}(0{,}10)\right]^2 = 4\left[1{,}782\right]^2 = 12{,}7 < 13$

$\theta_{12-1}(0{,}10) = 1{,}796$ et $4[\theta_{11}(0{,}10)]^2 = 4 \times (1{,}796)^2 = 12{,}9 > 12$

Conclusion : il faut $n = 13$

Vérification : $\varepsilon = \pm\theta_{n-1}(\alpha)\left(s_x \big/ \sqrt{n}\right) = 1{,}782\left(20 \big/ \sqrt{13}\right) = 9{,}885 < 10$

DÉTERMINATION DE LA TAILLE REQUISE D'UN ÉCHANTILLON (ESTIMATION DE LA MOYENNE – SUITE)

Marge d'erreur en termes relatifs :

$$\frac{\varepsilon}{m_x} = \pm\theta_{n-1}(\alpha)\frac{\left(s_x / m_x\right)}{\sqrt{n}}$$

Marge d'erreur dans l'estimation d'une proportion :

x_i = 1 si le répondant *i* est favorable

x_i = 0 si le répondant *i* n'est pas favorable

$$m_x = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{\text{Nombre de réponses favorables}}{\text{Nombre total de répondants}} = p$$

$s_x^2 = p\,(1 - p)$ où $0 < p < 1$

Maximum pour $p = 0{,}5$: $s_x^2 = 0{,}25$ et $s_x = 0{,}5$

AUTRES TESTS

Test de l'égalité entre deux moyennes

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$

- deux échantillons de même taille n

$$t_{2(n-1)} = \frac{m_1 - m_2 - \delta}{\left(s_1 + s_2 \big/ \sqrt{n} \right)}$$

- deux échantillons de tailles n_1 et n_2 respectivement

$$t_{2(n-1)} = \frac{m_1 - m_2 - \delta}{\left(\dfrac{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)s_1 + (n_2 - 1)s_2}{n_1 + n_2 - 2}}}{\sqrt{\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} \right)}$$

Test du χ^2 (Khi-deux)

- Test d'indépendance dans les tableaux de contingence (Khi-deux de Pearson)
- Test d'une hypothèse simple sur une variance

Échantillon aléatoire simple tiré d'une population normale de grande taille :

$\dfrac{s^2}{\left(\sigma^2 \big/ n-1 \right)}$ a la distribution du χ^2 avec n–1 degrés de liberté

Test *F* de Fisher

Deux paramètres : le nombre de degrés de libertés du numérateur et le nombre de degrés de liberté du dénominateur

Test sur le coefficient de corrélation simple de l'échantillon : $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \, s_y}$:

$H_0 : \rho = 0$

$\dfrac{r^2}{\left[\left(1 - r^2\right) \big/ (n-2) \right]} = (n-2)\dfrac{r^2}{1 - r^2}$ a la distribution du *F* de Fisher avec 1 degré de liberté au numérateur et (n–2) degrés de liberté au dénominateur.

Nombreuses applications dans l'analyse de régression

APPLICATION DE L'ARGUMENT AU TEST D'UNE HYPOTHÈSE SIMPLE SUR UN ÉCART-TYPE

Formulation générale	***Exemple: $n = 20$; $m_x = 110$; $s_x = 65$; $\alpha = 0{,}05$***
{hypothèse}	
$H_0 : \sigma_x = \gamma$	$H_0 : \sigma_x = 70$
{modèle d'échantillonnage}	

- Dans la population, la variable x a une distribution (approximativement) normale, avec une moyenne μ_x et un écart-type σ_x inconnus.
- La population est de très grande taille et il en a été tiré un échantillon aléatoire simple de taille...

n	20
{variable}	
$\dfrac{s_x^2}{\left(\sigma_x^2 / n-1\right)}$	$\dfrac{65^2}{\left(\sigma_x^2 / 19\right)}$
{distribution d'échantillonnage}	
Distribution du χ^2 avec...	
n–1 degrés de liberté	19 degrés de liberté
{variable-test}	
$\chi^2_{n-1} = \dfrac{s_x^2}{\left(\gamma^2 / n-1\right)}$	$\chi^2_{19} = \dfrac{65^2}{\left(70^2 / (20-1)\right)} = 16{,}38$
{seuil de signification}	
α	0,05
Orientation du test et {zone de rejet}	
test unilatéral à droite ($H_A : \sigma_x > \gamma$) : $\chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1}(0{,}05)$	test unilatéral à droite ($H_A : \sigma_x > 70$) : $\chi^2_{19} > 30{,}144$
OU	
test unilatéral à gauche ($H_A : \sigma_x < \gamma$) : $\chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1}(1{,}00 - 0{,}05)$	test unilatéral à gauche ($H_A : \sigma_x < 70$) : $\chi^2_{19} < 10{,}117$
OU	
{seuil de signification}	
2α	0,10
test bilatéral asymétrique ($H_A : \sigma_x \neq \gamma$) : $\chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1}(0{,}95)$ ou $\chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1}(0{,}05)$	test bilatéral asymétrique ($H_A : \sigma_x \neq 70$) : $\chi^2_{19} < 10{,}117$ ou $\chi^2_{19} > 30{,}144$

APPLICATION DE L'ARGUMENT AU TEST DU KHI-2 DE PEARSON D'INDÉPENDANCE DANS UN TABLEAU DE CONTINGENCE

Formulation générale	***Exemple : 2 col.; 5 lignes; α = 0,05*** [1]
{hypothèse}	
H_0 : Indépendance entre les deux variables catégoriques d'un tableau à deux dimensions	H_0 : Indépendance entre sexe et motif de présence à Place Versailles
{modèle d'échantillonnage}	
• Le tableau de contingence est le résultat d'un processus de Poisson ou d'une distribution multinomiale	
{variable}	
$X^2 = \sum_i \sum_j \frac{\left(x_{ij} - x_{ij}^*\right)^2}{x_{ij}^*}$ où x_{ij}^* dépend de H_0	$X^2 = \sum_i \sum_j \frac{\left(x_{ij} - x_{ij}^*\right)^2}{x_{ij}^*}$ où x_{ij}^* dépend de H_0
{distribution d'échantillonnage}	
Distribution asymptotique du χ^2 avec...	
$(C-1)(L-1)$ degrés de liberté (tableau de C colonnes et lignes)	4 degrés de liberté
{variable-test}	
$X^2 = \sum_i \sum_j \frac{\left(x_{ij} - x_{ij}^*\right)^2}{x_{ij}^*}$ avec $x_{ij}^* = \frac{x_{i\bullet}\, x_{\bullet j}}{x_{\bullet\bullet}}$	Khi-2 = 6,111436
{seuil de signification}	
α	0,05
Orientation du test et {zone de rejet}	
test unilatéral à droite (H_A : dépendance) : $X^2 > \chi^2_{n-1}(0,05)$	test unilatéral à droite (H_A : dépendance) : $X^2 > 9,488$

[1] Voir *4-1 Acétates du cours du 21 janvier 2003.pdf*, dernière page.

TABLE DES VALEURS CRITIQUES DU TEST DE STUDENT

Degrés de liberté	Probabilité 0,10	0,05	0,01
1	6,314	12,706	63,656
2	2,920	4,303	9,925
3	2,353	3,182	5,841
4	2,132	2,776	4,604
5	2,015	2,571	4,032
6	1,943	2,447	3,707
7	1,895	2,365	3,499
8	1,860	2,306	3,355
9	1,833	2,262	3,250
10	1,812	2,228	3,169
11	1,796	2,201	3,106
12	1,782	2,179	3,055
13	1,771	2,160	3,012
14	1,761	2,145	2,977
15	1,753	2,131	2,947
16	1,746	2,120	2,921
17	1,740	2,110	2,898
18	1,734	2,101	2,878
19	1,729	2,093	2,861
20	1,725	2,086	2,845
21	1,721	2,080	2,831
22	1,717	2,074	2,819
23	1,714	2,069	2,807
24	1,711	2,064	2,797
25	1,708	2,060	2,787
26	1,706	2,056	2,779
27	1,703	2,052	2,771
28	1,701	2,048	2,763
29	1,699	2,045	2,756
30	1,697	2,042	2,750
40	1,684	2,021	2,704
50	1,676	2,009	2,678
60	1,671	2,000	2,660
70	1,667	1,994	2,648
80	1,664	1,990	2,639
90	1,662	1,987	2,632
100	1,660	1,984	2,626
∞	1,645	1,960	2,576

Source : valeurs calculées à l'aide de la fonction TINV du logiciel Excel.

QUELQUES IDÉES CLÉS (SUITE)

14. Logique de rejet/non-rejet : si les observations ne contredisent pas les implications d'une théorie, on n'a pas le droit de conclure que cette théorie est vraie ! (p. 2-2.29); elle demeure « acceptable », mais elle n'est pas « acceptée ».
15. Logique probabiliste : une observation est *plus ou moins compatible* avec l'hypothèse (p. 2-2.27).
16. La *valeur* de la variable test peut être calculée. Elle est donc fixe, une fois l'échantillon tiré. Mais la variable elle-même n'en est pas moins une variable *aléatoire* : *avant* que l'échantillon ne soit tiré, il y avait donc une multitude (dans certains cas une infinité) de valeurs possibles de la variable-test (p. 2-3.5).
17. Le choix d'une variable-test et la spécification du modèle d'échantillonnage vont de pair (p. 2-3.6).
18. L'ensemble des hypothèses qui ne seraient *pas* rejetées à un seuil de signification donné constitue un *intervalle de confiance* (p. 2-3.28).
19. L'intervalle de confiance et le niveau de confiance sont indissociables (p. 2-3.30).
20. La marge d'erreur est d'ampleur de l'intervalle de part et d'autre de la moyenne observée qui définit l'intervalle de confiance. La marge d'erreur, comme l'intervalle de confiance, est dénuée de signification si elle n'est pas accompagnée de son niveau de confiance (p. 2-3.31).